JEUX DE DÉS

Statistiques : l'aube des probabilités

Au XVI^{e} et XVII^{e}, la recherche de résolution du problème du Grand Duc de Toscane, comme celui du Chevalier de Méré sont à la base de l'éclosion de la théorie du calcul des probabilités.
Il faut rappeler qu'à ces époques, les soldats, payés pour faire la guerre, passaient beaucoup de temps à ne rien faire (heureusement, mais dommage qu'ils n'y aient pas passé encore plus de temps...). Bonne occasion pour sortir un jeu de cartes ou de dés.
Certains devaient jouer souvent et longtemps pour remarquer des différences de 'fréquence' pourtant bien faibles, mais réelles.

Problème du Grand Duc de Toscane :

Le jeu consiste à lancer trois dès, faire la somme des points des faces supérieures des dés. L'expérience, montre une sortie plus fréquente des sommes 9 ; 10 ; 11 ; 12, sur lesquelles les paris se portaient donc. Joueur assidu, le Grand Duc de Toscane, s'aperçut que la somme 9 sortait moins souvent que la somme 10, alors que pourtant, toutes deux se décomposaient d'autant de façons :

- 9=6+2+1=5+3+1=5+2+2=4+4+1=4+3+2=3+3+3
- 10=6+3+1=6+2+2=5+4+1=5+3+2=4+4+2=4+3+3

Il consulta Cardan (1501-1576) mathématicien réputé, qui sécha. Le problème trouva une explication grâce à Galilée (1564-1642). Votre avis ?

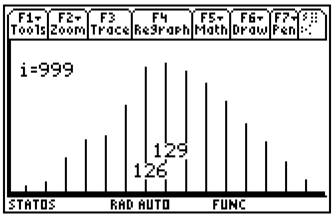
Problème du Chevalier de Méré :

Un peu plus tard, même histoire ou presque... Passe dix, jeu qui consiste à parier si la somme obtenue par trois fois le lancer d'un dé (le joueur est tenu plus longtemps en haleine qu'avec un seul lancer de trois dés !) est inférieure à dix, ou si elle 'passe' dix. Le Chevalier de Méré, joueur effréné et observateur constata une sortie plus fréquente de la somme 11 que de 12. Pourtant (je copie et colle la phrase du problème précédent) toutes deux se décomposaient d'autant de façons :

- 11=6+4+1=6+3+2=5+5+1=5+4+2=5+3+3=4+4+3
- 12=6+5+1=6+4+2=6+3+3=5+5+2=5+4+2=5+3+3

Pascal (1623-1662) se fit un plaisir de résoudre cette apparente contradiction. Et vous ?
Il faut remarquer, que la correspondance à propos de ce problème entre Pascal et Fermat (1601-1665) est à l'origine de la théorie du calcul des probabilités.

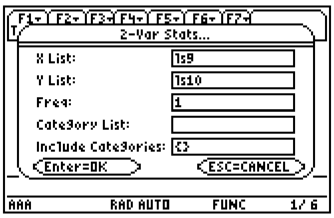
Illustration calculatrice : je choisis le problème du Grand Duc. Avec quelques légères retouches vous vous occupez de l'autre.



Est-ce que la réalisation d'un petit programme (listage joint en fin de texte) me permet d'apprécier une différence notable entre les sommes 9 et 10 ? (ou 11 et 12). OUI, ma belle TI 89 ou 92 (programme compatible) vous montre le bel écran du programme a_s9s10 après 999 tirages.
Les sommes possibles sont 3; 4 ; 5 ; .... ; 17 ; 18. La première petite barre à gauche c'est pour 3, puis 4, etc. Pour 9 et 10 c'est même écrit :
Pour 999 'tirages' la somme 9 est sortie 126 fois, et la somme 10 est sortie 129 fois. Ecart 'probant ?'.

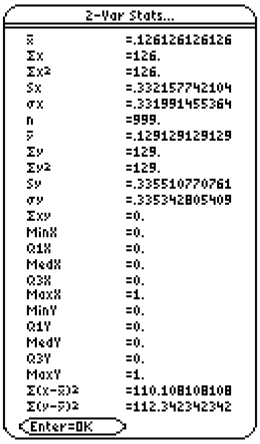
Question que je me pose : la différence est-elle due à une mauvaise programmation, un mauvais générateur aléatoire, ou puis-je la considérer comme représentative du phénomène observé ?

C'est dire que je vais me diriger rapidos vers un test d'hypothèse, à la mode de chez nous.



Le programme (voir fin de texte) utilise les listes ls9 et ls10 pour stocker les résultats obtenus lors des tirages. Ouverture de l'application StatFlash, puis entrée des données comme l'indique l'écran ci-contre.

Et les résultats... en page suivante.



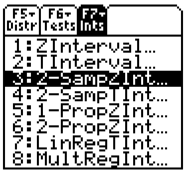
Elle m'en donne des choses c'te p'tite bête.

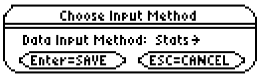
Remarque : je sais n'avoir besoin que de trois variables statistiques, la moyenne, l'écart type, l'effectif ou nombre de valeurs.
Je suis passé par '2-vars stats' qui me donne le tout en une seule fois au lieu de chercher d'abord les valeurs '1-var stat' pour ls9 puis pareil pour ls10.

$\overline{x}_9 = 0{,}12613 \quad s_9 = 0{,}33199 \quad \text{et} \quad n = 999$

$\overline{x}_{10} = 0{,}12913 \quad s_{10} = 0{,}33534 \quad \text{et} \quad n = 999$

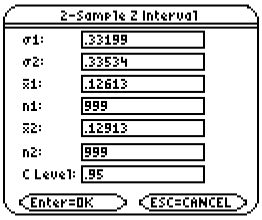
'L'INTERVALLE' DE CONFIANCE…

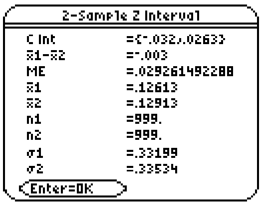




F7 menu 3 puis Stats

Remplir les données,



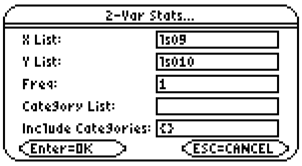


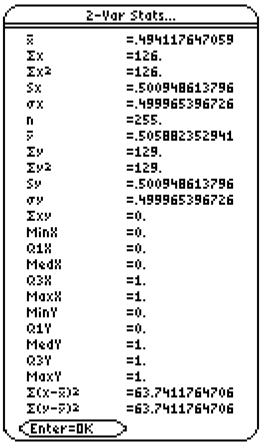
et voilà les résultats. Intervalle de confiance au seuil de 95 %.

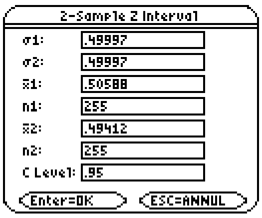
C'est beau non ?

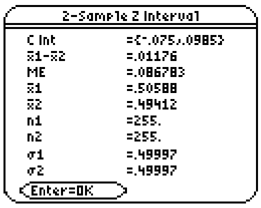
Qu'en penser ? rien ! car ce n'est pas vraiment ce qu'il fallait faire, enfin il me semble. Pourquoi ?
Parce que je n'ai pas l'impression que mes deux séries soient très Bernou-binomiales. En effet, je peux obtenir une somme de 9, de 10 OU de 3 ; 4 ; etc., donc pas 9 ou 10 exclusivement.
Je réalise donc un autre petit programme, au doux nom de a_s9s10c (toujours en fin de texte) qui va extraire les seuls cas de sortie de s9 et s10. Les résultats seront placés dans les listes s09 et s010.

Machine :
Je change de listes, et hop les résultats. Puis je demande l'intervalle, sans oublier de changer les valeurs.









Résultats ci-contre.

Je lis : n=255

$\overline{x}_9 = 0{,}49412 \qquad s_9 = 0{,}49967$

$\overline{x}_{10} = 0{,}50588 \qquad s_{10} = 0{,}49997$

Intervalle proposé]-0,075 ; 0,0985[centré sur 0,01176 avec comme rayon 0,08678. Commentaires suivent…

Et 'à la main' :

Galilée me l'a dit, la somme 9 se décompose de 25 façons différentes alors que la somme 10 en admet 27. Je sais de par ailleurs que le lancer de trois dés (à six faces) débouche sur 6^3=216 cas distincts.
Nous avons donc une différence théorique de 2 pour 216, soit $2 \times 999 \div 216$ c'est à dire environ 9 sorties (théoriques) supplémentaires pour la somme 10 en 999 tirages.
Par contre, après regroupement des 255 seuls tirages en somme 9 ou somme 10, notre attente devrait être une différence moyenne de $\dfrac{2}{25+27} = \dfrac{2}{52} \approx 0{,}038$. La différence constatée dans l'expérimentation est de 0,01176

Test d'hypothèse et intervalle de confiance (loi normale) :

Soit $d_x = \bar{x}_{10} - \bar{x}_9$ la différence des moyennes de ces deux valeurs. Alors la variance de cette variable est $v_{dx} = \frac{s_{10}^2}{n_{10}} + \frac{s_9^2}{n_9} = \frac{0,49997^2}{255} + \frac{0,49997^2}{255} \approx 0,00196$ d'où $s_{dx} = \sqrt{v_{dx}} \approx 0,0443$. Nous supposons que la différence moyenne devrait être de 0,038 alors que cette expérience nous a donné $0,01176 \approx 0,012$ soit plus de trois fois moins.

Au seuil de 95 % nous devrions avoir :

$0,038 \in \left]0,01176 - 1,96 \times 0,0626\,;\,0,01176 - 1,96 \times 0,0626\right[$ $ie.\,0,038 \in \left]-0,075\,;\,0,0985\right[$. Vrai bien entendu.

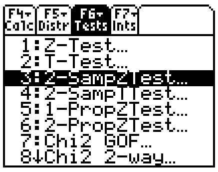
REM : n_9 et n_{10} représentent la taille de l'échantillon pour la valeur et non le nombre de sorties de cette valeur. Et, calculs effectués sans arrondis. Les calculs àla main sont conformes aux résultats calculatrice.

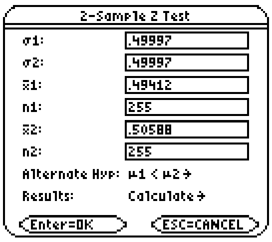
Et que dois-je comprendre ?

Hé bé que la différence est **normale**, sans surprise par rapport aux conditions de l'expérience. De là à confirmer ou non l'attente théorique…

Remarquons que notre différence (2 théorique, pour 0,61 dans l'expérience), rapportée en points de dés vis à vis de 52 (25+27) aurait pu osciller entre –3 et 5 (valeurs entières approchées) sans remise en cause de l'hypothèse !

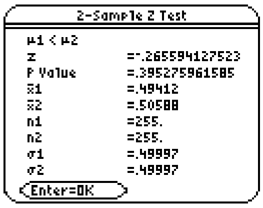
Voyons ce que me propose la machine en test d'hypothèse :

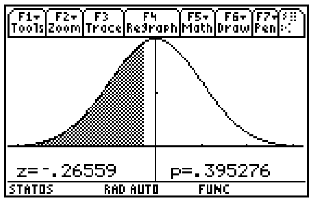




F7 menu 3 puis Stats

les résultats, obtenus par Calculate puis Draw.



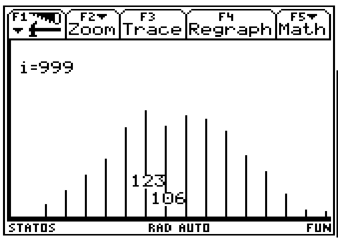


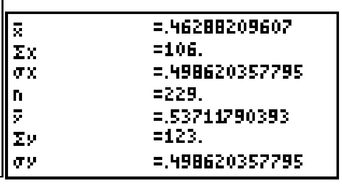
Interprétation et explications :

Sur le graphique, la zone hachurée c'est la partie où l'hypothèse n'est pas validée avec un risque d'erreur d'une probabilité de 0,395276.. Nous sommes intéressés par l'autre côté qui se dirait : « si la différence des deux moyennes est supérieure à -0,26559 alors je peux considérer que l'écart provient bien de la situation, et non d'une erreur de manipulation, avec une probabilité de 1-0,209825=0,790175 soit environ 79 % de ne pas me tromper. » remarque : **ELLE** (calculette va !) choisit la valeur z, elle calcule sur x_1-x_2.

Les résultats calculés disent la même chose sans image.

Je suis bien content de tous ces beaux résultats, mais soumis à la question, j'avoue avoir quelque peu pipé les dés... j'ai laissé tourner plusieurs fois le programme avant de choisir 'mon bon exemple'.





La preuve en image sur l'écran ci-contre où la somme 9 est plus forte que la somme 10.

Valeurs statistiques ci-contre.

Que donnent alors les calculs précédents ?

Soit $d_x = \bar{x}_{10} - \bar{x}_9 \approx -0,074$ la différence des moyennes de ces deux valeurs dans l'échantillon. La variance de cette variable est $v_{dx} = \frac{s_{10}^2}{n_{10}} + \frac{s_9^2}{n_9} \approx 0,00217$ d'où $s_{dx} = \sqrt{v_{dx}} \approx 0,0466$. Nous supposons toujours que la différence moyenne devrait être de 0,038.

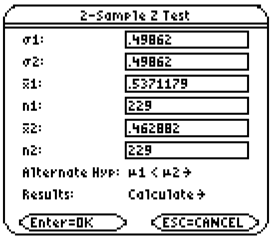
Au seuil de 95 % nous devrions avoir :
$d = 0{,}038 \in \left]0{,}074 - 1{,}96 \times 0{,}0466\,;\,0{,}074 + 1{,}96 \times 0{,}0466\right[= \left]-0{,}1208\,;\,-0{,}0276\right[$.

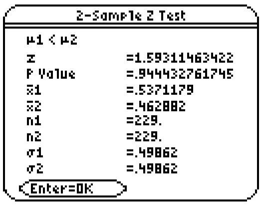
La différence théorique des moyennes (que je compare au résultat de cet échantillon) devrait être 0,038 qui se trouve hors de l'intervalle.

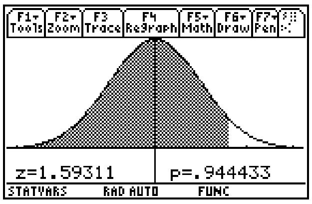
Je dois rejeter l'hypothèse d'une différence 'normale' entre les sommes 9 et 10, avec sans doute 5% de risques de me tromper.

Et DONC je pourrais me dire que puisque cette différence ne provient pas d'une erreur de manipulation (heu !) lors de l'expérience, je devrais proposer comme nouvelle théorie que finalement c'est la somme 9 qui doit sortir plus souvent ! (non j'ai pas l'intention de jouer aux dés ou aux cartes avec vous…).

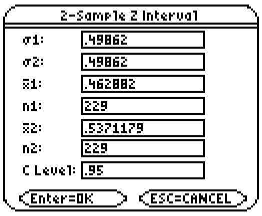
Que dit la machine en intervalle de confiance (je ne donne que les résultats) ?

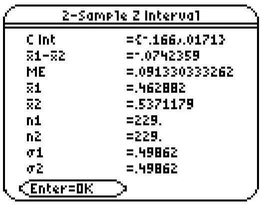






J'ai 6 % (1-0,94) de « bonnes raisons » (avec cet échantillon) de croire que la différence puisse être en faveur de la somme 10 !





Intervalle proposé :]-0,166 ; 0,171[centré en 0,0742 et de rayon 0,09133.
Intervalle qui ne contient pas, et de loin, la valeur théorique.

J'obtiens souvent une différence probante, dans le bon sens pour les sommes 9 et 10. Mais, sans tricher (forcer la série aléatoire à démarrer selon une suite favorable) il serait téméraire d'espérer que le premier échantillon venu puisse, dans une classe, servir de point de départ théorique… mais, cela peut donner à réfléchir. Ce n'est pas avec un petit échantillon que l'on doit envisager de construire une grande théorie !

Remarque: et si je disais, après ces quatre belles pages, que tu (oui c'est moi) as préparé le papier pour allumer la cheminée en hiver… Comment, je m'aurais trompé à l'insu de mon plein gré ?
Peut-être que comparer deux variables (liées) d'un même échantillon ça permet de faire de beau calculs, mais j'aurais préféré comparer la même variable de deux échantillons.
Quand à comparer la théorie et la pratique, ce qui peut se faire ici, peut être qu'un test du khi deux serait préférable.

Variable	Somme 9	Somme 10
Observé :	126	129
Théorique :	115,625	124,875

$$\chi^2 = \frac{(126 - 115{,}625)^2}{115{,}625} + \frac{(129 - 124{,}875)^2}{124{,}875} = 1{,}067$$

k=2 (catégories) d'où v=2-1=1 degré de liberté.

Une bonne table dit alors

Au seuil de signification de :	Valeur	et comparaison	Conclusion
$\chi^2_{0,99}$ 1 % ou 0,01	6,63 >	1,067	Accepte résultat comme correct
$\chi^2_{0,95}$ 5 % ou 0,05	3,84 >	1,067	Accepte résultat comme correct

L'étude sur le générateur aléatoire dans le programme pile face (v. autre texte) est plus 'régulière'. Après tout, le hasard doit garder sa part aléatoire.

- dommage, ce n'est pas comme je l'ai lu récemment quelque part... « la réalité colle exactement aux prévisions de l'étude statistique »
- le hasard est opposé au déterminisme (C'est un scandale, que fait mon inspecteur ?)

```
Prgm          (a_s9s10)
ClrDraw :ClrIO
setFold(statos)
newList(999)»ls3:newList(999)»ls4
newList(999)»ls5:newList(999)»ls6
newList(999)»ls7:newList(999)»ls8
newList(999)»ls9:newList(999)»ls10
newList(999)»ls11:newList(999)»ls12
newList(999)»ls13:newList(999)»ls14
newList(999)»ls15:newList(999)»ls16
newList(999)»ls17:newList(999)»ls18

0»xmin:0»ymin
¨ ti89»160 ti92»240
getConfg()»testcalc
If testcalc[10]=160 Then
158»xmax:76»ymax
PtText  "i=",5,65
Else
238»xmax:102»ymax
PtText  "i=",5,90
EndIf

0»s3:0»s4:0»s5:0»s6:0»s7:0»s8:0»s9:0»s10:0»s
11:0»s12:0»s13:0»s14:0»s15:0»s16:0»s17:0»s18

For  i,1,999
rand(6)+rand(6)+rand(6)»s0
If testcalc[10]=160 Then
PtText  string(i),15,65
Else
PtText  string(i),15,90
EndIf
If s0=3 Then
1»ls3[i]
s3+1»s3
PtOn  9,s3/2
EndIf
If s0=4 Then
1»ls4[i]
s4+1»s4
PtOn  19,s4/2
EndIf
If s0=5 Then
1»ls5[i]
s5+1»s5
PtOn  29,s5/2
EndIf
If s0=6 Then
1»ls6[i]
s6+1»s6
PtOn  39,s6/2
EndIf
If s0=7 Then
1»ls7[i]
s7+1»s7
PtOn  49,s7/2
EndIf
If s0=8 Then
1»ls8[i]
s8+1»s8
PtOn  59,s8/2
EndIf
```

```
If s0=9 Then
1»ls9[i]
s9+1»s9
PtOn  69,s9/2
EndIf
If s0=10 Then
1»ls10[i]
s10+1»s10
PtOn  79,s10/2
EndIf
If s0=11 Then
1»ls11[i]
s11+1»s11
PtOn  89,s11/2
EndIf
If s0=12 Then
1»ls12[i]
s12+1»s12
PtOn  99,s12/2
EndIf
If s0=13 Then
1»ls13[i]
s13+1»s13
PtOn  109,s13/2
EndIf
If s0=14 Then
1»ls14[i]
s14+1»s14
PtOn  119,s14/2
EndIf
If s0=15 Then
1»ls15[i]
s15+1»s15
PtOn  129,s15/2
EndIf
If s0=16 Then
1»ls16[i]
s16+1»s16
PtOn  139,s16/2
EndIf
If s0=17 Then
1»ls17[i]
s17+1»s17
PtOn  149,s17/2
EndIf
If s0=18 Then
1»ls18[i]
s18+1»s18
PtOn  159,s18/2
EndIf
EndFor

If s10>s9 Then
PtText  string(s9),61,15
PtText  string(s10),71,25
Else
PtText  string(s9),61,25
PtText  string(s10),71,15
EndIf
EndPrgm
```

```
Prgm          (a_s9s10c)
1»k
For i,1,999
If ls9[i]=1 or ls10[i]=1 Then
k+1»k
EndIf
EndFor

newList(k-1)»ls09
newList(k-1)»ls010

1»k
For i,1,999
0»tem
If ls9[i]=1 Then
1»tem:1»ls09[k]
EndIf
If ls10[i]=1 Then
1»tem:1»ls010[k]
EndIf
If tem=1 Then:k+1»k:EndIf
EndFor
EndPrgm
```