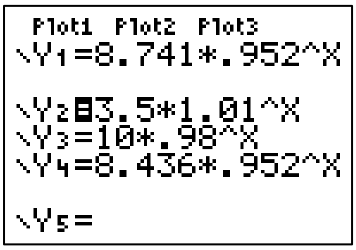
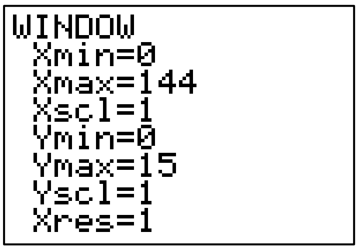
Pourcentages répétitifs, suites géométriques, fonction puissance, phénomène exponentiel

Pré requis : expression d'un pourcentage à partir d'un coefficient multiplicateur. Ce qui donne une idée de suites géométriques. (Avec U_{n+1}/U_n=constante super important et caractéristique)

Continuons de détailler ces suites : un objet à 3,50 F (ce pourrait être une baguette de pain, simple fiction) augmente de 1 % tous les mois. Pfout, qu'est-ce donc qu'un pour cent de pas grand chose !

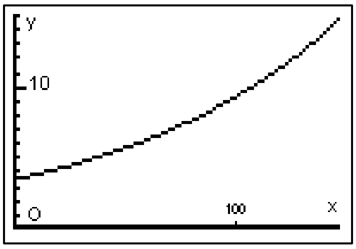
Le prix, un mois plus tard se formulera $P_1 = 3{,}50 \times 1{,}01$. Le mois suivant, $P_2 = 3{,}50 \times (1{,}01)^2$. Et pour le $n^{\text{ième}}$ mois d'après, $P_n = 3{,}50 \times (1{,}01)^n$. Belle expression, de la forme ***f(x)*=a.b*x*** que nous allons regarder à travers l'écran d'une calculatrice à qui je vais demander de tracer la courbe correspondant à la fonction *f(x)*=$3{,}50 \times (1{,}01)^x$. Une année représente déjà 12 mois, ce qui ne donne pas grand chose à l'écran. J'en prendrai une grosse (une douzaine de douzaines) soit 144 mois pour 12 ans.





Ci-contre, première à gauche, la fonction y_2 est celle que nous allons observer. Les autres vont suivre… et cet écran nous permet de les avoir déclarées toutes.

Le deuxième écran donne l'intervalle d'étude.

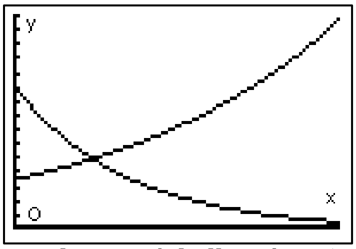


X	Y2
0.000	3.500
1.000	3.535
2.000	3.570
3.000	3.606
4.000	3.642
5.000	3.679
6.000	3.715

X=0

A cet étage, nous avons la jolie courbe 'qui monte de plus en plus', puis offert par ma calculatrice, un tableau de valeurs.

J'utilise ce tableau pour lire les valeurs 5 F au bout de 36 mois, 7 F au $70^{\text{ième}}$ (donc le double) et 14,67 F pour 12 ans (144 mois). Je peux remarquer une augmentation de plus en plus rapide (la valeur double pour 70 mois, elle redouble pour 70 mois plus tard, DONC elle a augmenté de 3,50 F en 6 ans puis de 7 F les 6 années suivantes !). Intéressant non !
Ce qui est important, en dehors de 'tout', c'est d'avoir la courbe dans l'œil (pas trop profond SVP !).

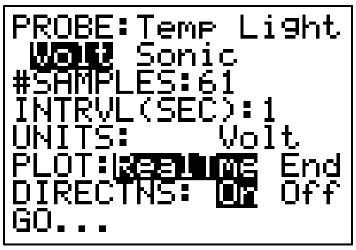


Et je recommence, non pour une augmentation continue, mais pour une diminution perpétuelle. Une tour, qui n'a pas été bâtie à Pise, toise 10 m le jour de son inauguration. Voilà-t-y pas qu'elle s'enfonce de 2 % par mois de la hauteur restant visible. Calculs… et je tombe sur la formule $y_3=10 * 0{,}98^x$. De la forme ***f(x)*=a.b*x***

Courbe ci-contre, et tableau de valeurs montré en classe, avec pour étapes principales : en 1 an elle perd 2 m !, au $35^{\text{ième}}$ mois (3 ans) elle ne fait plus que la moitié d'elle même (tient donc résoudre h=h/2…) et si je continue, au $80^{\text{ième}}$ plus que 2 petits mètres, dans sa $10^{\text{ième}}$ année elle passe en dessous du mètre, et si j'attends encore un peu, près de 17 ans plus tard, elle sert de marche d'une hauteur idéale de 17 cm (il paraît que c'est la meilleure hauteur pour construire les marches).

Les fonctions puissance sont représentatives du phénomène exponentiel.

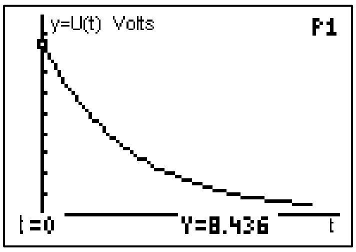
Je 'Flashe' la courbe (je l'ai dans l'œil !), et je passe à de l'expérimentation.

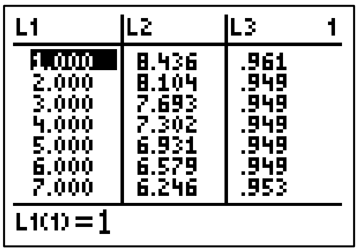



```
LVOLT→L2
For(I,1,dim(L2))
I→L2(I)
End
For(I,1,dim(L2)-1)
L2(I+1)/L2(I)→L3(I)
End
```

Nous allons présumer de la loi de charge ou décharge d'un condensateur. Ma machine peut piloter un capteur intelligent, dit CBL, capable de mesurer, entre autre, la tension tous les 'un certain temps'. L'écran de gauche nous dit que je vais mesurer des volts, toutes les secondes, 61 fois en tout, que l'affichage se fera en direct. A droite petit programme pour calculer les rapports U_{n+1}/U_n.

J'ai une brave petite pile de 9 V, pas trop dangereux ça, un condensateur marqué C=2200 µF couplé à une résistance de décharge de R=9200 Ω. et c'est parti.





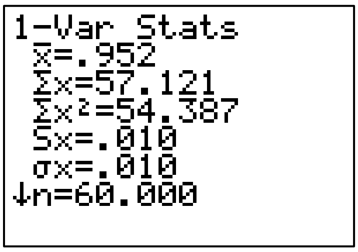
L1	L2	L3 1
1.000	8.436	.961
2.000	8.104	.949
3.000	7.693	.949
4.000	7.302	.949
5.000	6.931	.949
6.000	6.579	.949
7.000	6.246	.953

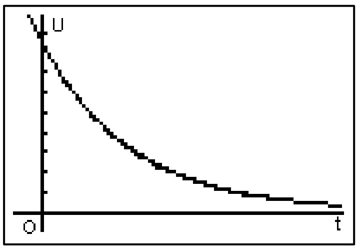
L1(1)=1

Premier écran, la courbe ressemble à celle de la tour qui dégringole.

Est-ce le même phénomène ? le petit programme (page précédente) me permet de voir le rapport $L_{2(n+1)}/L_{2(n)}$ en L_3. Je remarque des nombres voisins. En faisant défiler ces nombres du tableau, je constate une certaine similitude entre les résultats. Vous m'autorisez à dire que, aux erreurs de manipulation près (approximation de la durée de l'intervalle de temps entre deux mesures, et de celle de la valeur de la tension), c'est constant. Nous allons voir que c'est raisonnable.

Petite machine, sollicitée pour donner une petite statistique rapide sur notre série de nombres de la liste L_3, donne une moyenne de 0,952.



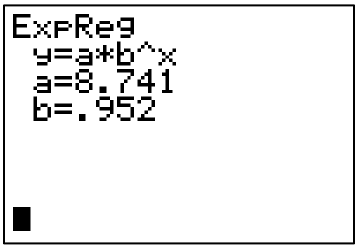


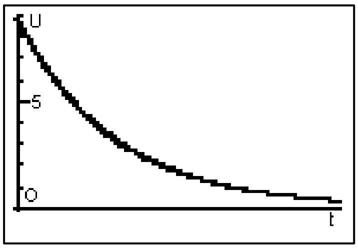
Nous identifions la forme $f(x)=a.b^x$ donc la 'loi' de calcul à la fonction $y_4 = 8{,}436 \times 0{,}952^x$ .Que je fais tracer.

Et le miracle a bien lieu, la courbe qui apparaît semble recouvrir la précédente.

Toujours plus :

Puisque nous cherchons à valider une hypothèse, faisons un petit détour côté stats, après tout, dans la liste des calculs possibles j'ai vu 'régression' ce qui signifie en gros comparer à un modèle.





Je lui demande, « le modèle exponentiel », elle me répond « l'écran à gauche », en sachant que y c'est y_1, du premier écran de la page précédente.

Et zou, les trois courbes l'une sur l'autre.

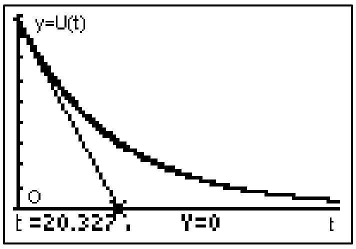
Bon, je déclare : **« La décharge d'un condensateur est un phénomène exponentiel ».**

Beaucoup plus : Il manque la liaison entre R, C et ce que nous avons trouvé…

Que dit le physicien ? par calcul intégral $U = U_o\, e^{-\frac{t}{RC}} = U_o\, e^{-\frac{t}{t}}$ avec $\boldsymbol{t} = RC$. U_o c'est notre a=8,436 pour la première courbe, ou a=8,741 de la deuxième, de nos estimations de la forme $f(x)=a.b^x$.

Certains savent que nous pouvons écrire $y_1 = 8{,}741 \times 0{,}952^x = 8{,}741 \times e^{x \ln(0{,}952)}$ pour la première et $y_4 = 8{,}436 \times 0{,}952^x = 8{,}436 \times e^{x \ln(0{,}952)}$ pour la seconde. Ce qui permet d'écrire $\frac{-1}{\boldsymbol{t}} = \frac{-1}{RC} = \ln(0{,}952)$.

RC=2200*10^{-6}*9200=20,24. Or –1/ln(0,952)=20,33. Pas mal.



Et… ce même physicien me chuchote que la tangente à la courbe permet de retrouver τ. Il suffit de mesurer la distance entre l'abscisse d'un point A quelconque (O par exemple) et l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe en ce point A avec la droite des abscisses. Petite machine me dit : « nombre dérivé en x=0 de y_1 c'est - 0,430 et pour y_4 c'est - 0,415 » merci machine.

Les équations de mes tangentes : y_{11}=- 0,430x+8,741 et y_{41}=- 0,415x+8,436.

Tangentes qui coupent l'axe des x en x_1=20,33 (enfin, 20,3279) et x_4=20,33 (oui, 20,3277 !). Que c'est même ça qu'elle me dit ma calculatrice (une seule tangente tracée : y_{41}). C'est beau n'est-il pas ?

Rem : en x=100 (hors écran) la tangente s'écrit y=-0,003x + 0,362 qui coupe l'axe des abscisses en x=120,666 soit une différence de 20,67, encore très proche de la valeur RC. Le tout en 'calculs approchés'.

Ne croyez surtout pas que c'est fini !

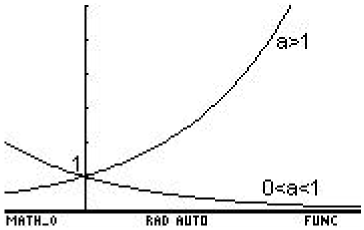
Nous n'allons quand même pas rester sur une impression de recette de cuisine…

Je change de machine, pas que la couleur soit plus belle, mais plutôt parce que là j'ai droit au calcul formel.

Résumé des épisodes précédents : nous avons remarqué certaines caractéristiques du phénomène exponentiel :

- ✓ les suites géométriques nous ont dit que les rapports U_{n+1}/U_n sont constants
- ✓ les courbes sont assez reconnaissables (vers en haut ou vers en bas)
- ✓ la tangente en tout point est particulière, la différence entre les abscisses du point de tangence et de celle du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est constante. Vrai de Vrai ?

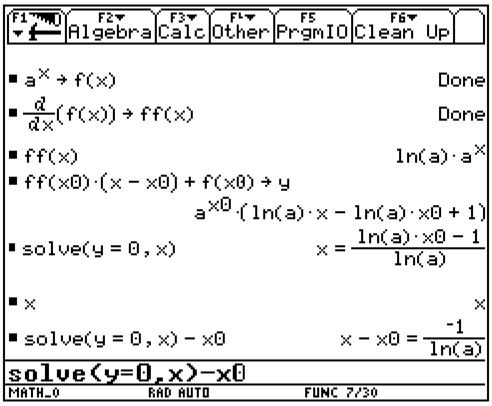
Au lieu d'étudier $a.b^x$ je vais prendre a^x, pour éviter de traîner un coefficient qui n'est pas utile. Il faut a>0, et oui c'est un peu des maths, et si dans $\mathbb{R}$ je n'ai pas de cas de conscience pour écrire $(-1)^2$, que penser de $(-1)^{1/2}$?



Nous obtenons deux courbes, selon que a soit un réel supérieur à un, ou qu'il soit compris entre zéro et un.

Elles ont bien l'aspect déjà remarqué.

Je connais la formulation habituelle de la tangente en un point d'une courbe définie par une fonction f : $y = f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0)$.



Ecran ci-contre :

je définis *f*, puis *f '* qui sera stockée dans ff(x) car *f '(x)* n'est pas accepté par la machine.

Calcul de *f'*. Il faut rappeler que a^x s'écrit aussi $e^{x\ln(a)}$.
Définition de l'équation de la tangente en x_0.

Je demande l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.

Je fais remarquer que x ne contient rien…

Je demande la différence entre l'abscisse du point d'intersection et celle du point de tangence. C'est une constante, indépendante de x, ça ne dépend que de a. CQFD !

Il ne reste plus qu'à regarder d'un peu plus près cette fonction souvent citée, mais bien cachée, la fonction exponentielle, e^x, qui n'est après tout qu'un cas particulier de a^x avec a = e   2,71828…, sachant que e est LE nombre tel que ln(e)=1. Mais c'est une autre histoire.

Remarque : sur les écrans ont été rajoutées des indications que ma calculatrice n'écrit pas, comme les intitulés des axes, les unités.

Ci-contre le matériel utilisé, ci-dessous le schéma photo du montage.